LEKCJA 3

Wybór strategii mieszanej nie jest wyborem określonych decyzji, lecz pozornie sztuczną procedurą która wymaga losowych lub innych wyborów. Gracze „mieszają” nie dlatego że jest im obojętna strategia, lecz żeby zmylić przeciwnika.

Przykład: Walka płci

	Kobiecy *q*	Sportowy *1-q*
Kobiecy *p*	2, 1	0, 0
Sportowy *1-p*	0, 0	1, 2

Oczekiwana wypłata gracza I z tytułu zagrania K: 2q+0(1-q)=2q
Oczekiwana wypłata gracza I z tytułu zagrania S: 0q+1(1-q)=1-q

$$\Downarrow$$

jeśli q>1/3, to najlepsza odpowiedź gracza I jest K (p=1)
jeśli q<1/3, to najlepsza odpowiedź gracza I jest S (p=0)
jeśli q=1/3, to dowolna wartość p jest najlepszą odpowiedzią gracza I

Oczekiwana wypłata gracza II z tytułu zagrania K: 1p+0(1-p)=p
Oczekiwana wypłata gracza II z tytułu zagrania S: 0p+2(1-p)=2(1-p)

$$\Downarrow$$

jeśli p>2/3, to najlepsza odpowiedź gracza II jest K (q=1)
jeśli p<2/3, to najlepsza odpowiedź gracza II jest S (q=0)
jeśli p=2/3, to dowolna wartość q jest najlepszą odpowiedzią gracza II

równowaga Nasha jest parą strategii mieszanych: (p,1-p)={2/3, 1/3} dla gracza I
(q,1-q)={1/3, 2/3} dla gracza II

Ile równowag Nash’a może występować w grze 2x2?

Przypadek	Nazwa gry	Ilość NE w strategiach czystych	Ilość NE w strategiach mieszanych
I	Orzeł i Reszka	0	1
II	Dylemat Więźnia	1	0
III	Walka Płci	2 (po przekątnej)	1
IV	Bez nazwy	2 (obok siebie)	∞
V	Bez nazwy	3	∞
VI	Bez nazwy	4	∞

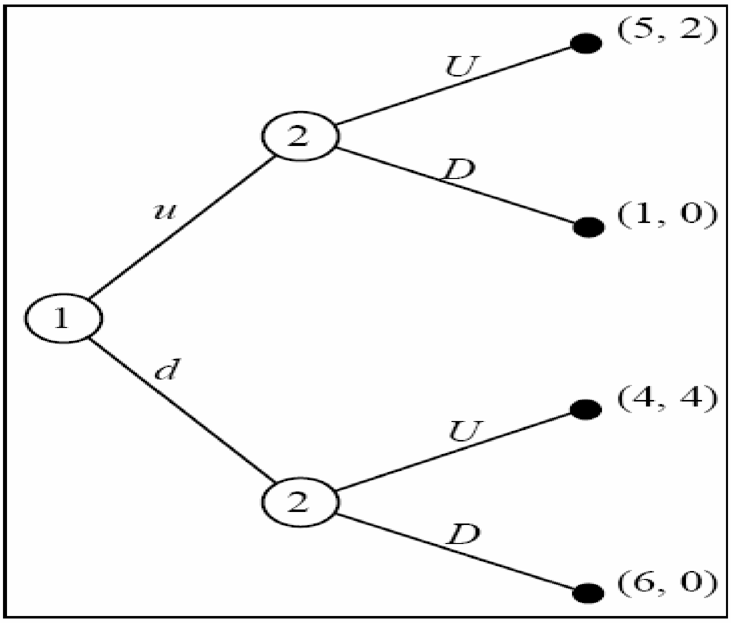
Gry dynamiczne

Gry dynamiczne (np. model Stackelberga) w odróżnieniu od statycznych (np. model Cournot) służą do opisu sytuacji strategicznych, w których występuje struktura czasowa, a gracze mają możliwość podejmowania decyzji (w różnych momentach czasu).

Gry dynamiczne są wieloetapowe w odróżnieniu od gier statycznych (decyzje podjęte w jednym etapie określają sytuację w następnym etapie i dopiero na końcu znane są ostateczne wyniki, np. szachy).

Opis gry dynamicznej przedstawiamy najczęściej w formie rozwiniętej (lub ekstensywnej) jako „drzewko" składające się z następujących elementów:
- **wierzchołki** (węzły) decyzyjne określają bieżącą sytuację w grze
    - gra dynamiczna zawiera tylko jeden wierzchołek początkowy
    - każdy wierzchołek (oprócz początkowego) ma dokładnie jednego bezpośredniego poprzednika
    - do każdego wierzchołka można dojść tylko w jeden sposób
- **gałęzie** (krawędzie) oznaczają dostępne w danym momencie posunięcia (ruchy) gracza i są skierowane zgodnie z kierunkiem strzałki wychodzącej z danego wierzchołka
    - każda gałąź odpowiada posunięciu (**akcji**) jednego gracza
    - początek i koniec każdej gałęzi tworzy wierzchołek
    - każda gałąź wychodzi z jednego wierzchołka i prowadzi do jednego kolejnego wierzchołka
    - wierzchołek do którego nie prowadzi żadna gałąź oznacza początek gry, a wierzchołki z których żadna gałąź już nie wychodzi oznacza koniec gry
    - ta sama akcja może odpowiadać różnym gałęziom pod warunkiem, że nie wychodzą one z tego samego wierzchołka
- ciąg gałęzi następujących bezpośrednio po sobie nazywa się **drogą**
    - do każdego wierzchołka prowadzi dokładnie jedna droga zaczynająca się w wierzchołku początkowym (żadna droga nie prowadzi dwa razy przez ten sam wierzchołek)
- **ścieżką** gry jest droga od wierzchołka początkowego do pewnego wierzchołka końcowego (obrazuje jeden z możliwych sposobów rozegrania gry i zawiera kompletny opis wydarzeń jakie zaszły od początku rozgrywania
    - do opisu równowagi używamy „ruchy" (akcji) graczy, które będą podjęte w każdym wierzchołku decyzyjnym bez względu na to czy ten wierzchołek będzie osiągnięty w równowadze czy nie

Przykład: Gra dynamiczna w postaci ekstensywnej



Każdy gracz ma identyczną liczbę „akcji", ale różną liczbę „strategii":

gracz I ma oraz dwie strategie - u, d,

gracz II ma cztery strategie – UU, UD, DU, DD

W grach w postaci macierzowej nie ma rozróżnienia pomiędzy „strategią" i „akcją" gracza, natomiast w grach w postaci rozwiniętej jest różnica.

Strategia – kompletny plan rozegrania całej gry (kompletny opis postępowania gracza w każdej możliwej sytuacji, w której to właśnie on ma wykonać posunięcie). Jest to zestaw akcji opisujący co zrobi dany gracz w **każdym** ze swoich wierzchołków. Strategia musi być określona na wszystkich wierzchołkach gracza, nawet jeśli dojście do niektórych sama wyklucza.

NE: (u, UU) oraz (d, DU)

$\Downarrow$

Strategia gracza II zawiera groźbę zagrania D jeśli gracz I zagra *u*.

$\Downarrow$

Jeśli faktycznie gra doszłaby do górnego wierzchołka gracza II, zrealizowanie groźby jest dla niego niekorzystne (strategia UD jest zdominowana).

$\Downarrow$

Zakładając sekwencyjną racjonalność gracza II, gracz I powinien zmienić swoją strategię z *d* na *u*.

$\Downarrow$

Równowaga (d, DU) nie jest dobrym przewidywaniem zakończenia gry, ponieważ groźba (gracza II) którą zawiera jest niewiarygodna.

$\Downarrow$

Doskonała NE: (u, UU)

Częste problemy w grach ekstensywnych:
1. nadmiar NE
2. część tych NE opiera się na niewiarygodnych groźbach

Wiarygodność jest podstawowym problemem gier dynamicznych. Musimy ocenić wiarygodność gróźb i obietnic strategii dostępnych innym graczom w przyszłych ruchach, które mają dla nas istotne znaczenie.

Wiarygodne groźby – strategie graczy pozostają najlepszymi odpowiedziami na siebie we wszystkich zbiorach informacyjnych każdego gracza

Doskonała równowaga - równowaga, która opiera się wyłącznie na wiarygodnych groźbach. Taką równowagę można znaleźć przy pomocy indukcji wstecz.

Gry dynamiczne z pełną informacją mogą mieć wiele równowag Nasha, lecz niektóre z nich nie przechodzą pozytywnie testu wiarygodności (przykład Gibbons s.60)

Przykład: [Gibbons s.60]

- w trzecim etapie gracz I wybierze L

- w drugim etapie gracz II wie, że gracz I nigdy nie wybierze R w trzecim etapie $\Rightarrow$ gracz II wybierze L

- w pierwszym etapie gracz I przewiduje, że jeśli gra dotrze do drugiego etapu wtedy gracz II wybierze L $\Rightarrow$ gracz I zagra L

doskonała NE: {LL, L}

Interpretacja wyniku:

Załóżmy, że gracz I wybierze R w pierwszym etapie. $\Rightarrow$ Gracz II może sądzić, że gracz I jest nieracjonalny. $\Rightarrow$ Nie jest powszechną wiedzą że oboje gracze są racjonalni

(1) Jeśli powszechną wiedzą jest, że gracz I jest racjonalny natomiast gracz II nie jest $\Rightarrow$ Gracz I myśli że gracz II może nie być racjonalny $\Rightarrow$ gracz I może wybrać R w pierwszym etapie mając nadzieje, że gracz II zagra R w drugim etapie i tym samym dając możliwość graczowi I zagrać L w trzecim etapie.

(2) Jeśli powszechną wiedzą jest, że gracz II jest racjonalny natomiast gracz I nie jest ⇒ Jeśli gracz I jest racjonalny, ale myśli że gracz II myśli że gracz I może nie być racjonalny, to gracz I może wybrać R w pierwszym etapie (mając nadzieje, że gracz II myśli, że gracz I jest nieracjonalny i wybierze R w drugim etapie sądząc że gracz I zagra R w trzecim etapie).

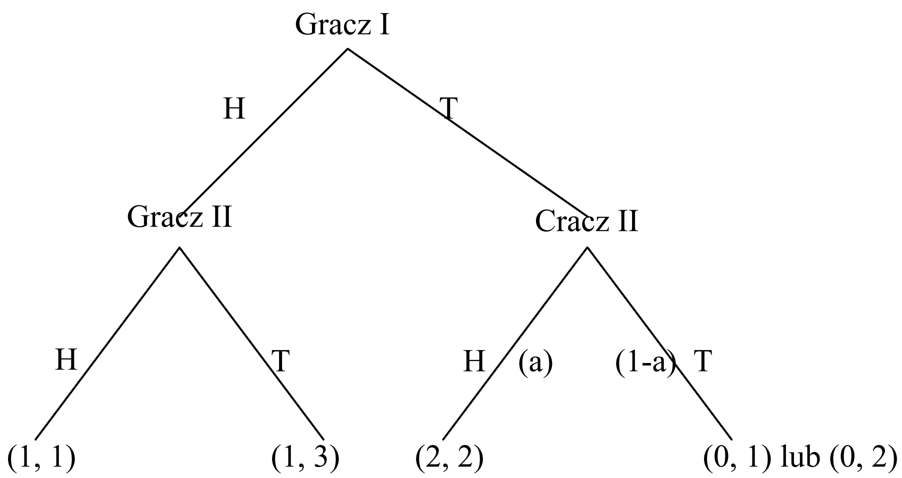
W takich grach – gdy gracz I gra nieracjonalnie w pierwszym etapie – metoda indukcji wstecz traci swoją siłę.

Wniosek:

Jeśli gracz I wybierze R w pierwszym etapie ⇒ Gracz II zagra L w drugim etapie obawiając się podstępnego planu gracza I.

Jeśli gracz I wybierze L w pierwszym etapie ⇒ Gracz II nic nie wybierze.

Przykład: [Malawski s. 21]



Przypadek 1: doskonała NE – gracz I wybierze T ⇒ Gracz II zagra H

Przypadek 2: doskonała NE - gracz I wybierze H jeśli $a \leq ½$ ⇒ Gracz II zagra T
gracz I wybierze T jeśli $a \geq ½$ ⇒ Gracz II zagra H

Przykład: Negocjacje w trzech etapach

Gracze I oraz II na przemian składają propozycje podziału jednego dolara, przy czym zaczyna gracz I. Gracz odrzucający propozycję musi sam złożyć następną. Po zaakceptowaniu którejkolwiek propozycji gra kończy się i następuje uzgodniony podział. Każdy z graczy może złożyć tylko po jednej propozycji. W razie niezgodności pomiędzy graczami dolar zostanie podzielony przez arbitra.

P - pierwszą propozycję składa gracz I

A – zaakceptować
R - nie zaakceptować
Każda propozycja jest składana w pewnym okresie czasu:
$(s_1, 1-s_1)$ – wypłata w pierwszym okresie
$(s_2, 1-s_2)$ – wypłata w drugim okresie
$(s, 1-s)$ – wypłata w trzecim okresie jest zadana egzogenicznie
$0< s_1, s_2, s, \delta <1$
δ - stopa dyskontowa (czyli pieniężna wartość czasu) $\delta=1/(1+r)=PV$

Założenie: każdy gracz zaakceptuje propozycje podziału dolara jeśli będzie obojętny pomiędzy wyborem A lub R.

Rozwiązanie:

Jaka jest optymalna propozycja graca II w drugim okresie?
Gracz I: A jeśli $s_2 \geq \delta s$

Gracz II: jeśli zaoferuje $s_2 = \delta s$ $\Rightarrow$ wypłata będzie $(1-\delta s)$ w tym okresie
jeśli zaoferuje $s_2 < \delta s$ $\Rightarrow$ wypłata będzie $(1-s)$ w następnym okr.

$$\Downarrow$$
$$(1-\delta s) > \delta(1-s)$$
$$1 > \delta$$
$$\Downarrow$$

Jeśli gra nie skończy się w pierwszym okresie, to w drugim okresie gracz II zaoferuje $s_2{}^*=\delta s$ i gracz I zaakceptuje ofertę.

$$\Downarrow$$

Nie będzie trzeciego okresu (w przeciwnym razie $\delta > 1$)
Jaka jest optymalna propozycja gracza I w pierwszym okresie?

Gracz I: jeśli zaoferuje $(1-s_1) = \delta(1-s_2{}^*) \Rightarrow s_1 = 1-\delta(1-s_2{}^*)$ w tym okresie
jeśli zaoferuje $(1-s_1) < \delta(1-s_2{}^*) \Rightarrow s_2{}^*$ w następnym okresie

Gracz II: A jeśli $(1-s_1) \geq \delta(1-s_2{}^*)$ czyli $s_1 \leq 1-\delta(1-s_2{}^*)$

$$\Downarrow$$
$$\delta s_2{}^* < 1-\delta(1-s_2{}^*)$$
$$\delta^2 s < 1-\delta(1-\delta s) \text{ ponieważ } s_2{}^* = \delta s$$
$$\Downarrow$$
$$\delta < 1$$
$$\Downarrow$$

Rozwiązując grę metodą indukcji wstecz, gracz I zaoferuje
$s_1{}^*=1-\delta(1-s_2{}^*)=1-\delta(1-\delta s)$ oraz gracz II zaakceptuje ofertę.

$\Downarrow$

Nie będzie drugiego i trzeciego okresu

wypłata w równowadze: $\{s_1^*, 1-s_1^*\}=\{1-\delta+\delta^2 s, \delta-\delta^2 s\}$
czyli dla s=1 oraz r=1% gr. I zaproponuje {0.99, 0.01}
w pierwszym okresie i gracz II zaakceptuje ofertę.